

Soutěžní příklady

Příklad 1. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z &= 2, \\y^2 + z^2 + x &= 2, \\z^2 + x^2 + y &= 2.\end{aligned}$$

Příklad 2. Dokažte, že pro každé $a, b \in \mathbb{N}$ platí

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{a + b}.$$

Rozhodněte navíc, kdy nastává rovnost.

Příklad 3. Řešte v oboru kladných reálných čísel soustavu

$$\begin{aligned}xz + y^2 &= 2yz, \\yt + z^2 &= 2tz, \\zx + t^2 &= 2tx, \\ty + x^2 &= 2xy.\end{aligned}$$

Příklad 4. Řešte v oboru reálných čísel soustavu

$$\begin{aligned}\frac{x^2y - x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} + xy^2 + 2xy - xz + y^2 - x - y &= 0, \\ \frac{3x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} - x + 2y &= 0, \\ \frac{x^2y - x^2}{\sqrt{4yz + x^2 - 4y^2 - z^2}} - 2xy^2 + 2xz + 3y^2 - 11xy - 3y + 9x &= 0.\end{aligned}$$

Příklad 5. Rozhodněte o řešení následující soustavy v závislosti na parametru p

$$\begin{aligned}13x^2 - 4xy + 10y^2 - 12yz + 5z^2 - 6xz &= 0, \\61y^2 - 48yz + 41z^2 - 60zt + 52t^2 - 40yt &= 0, \\(p^2 + 9)x^2 - 4pxt + 13t^2 - 12pt - 24x &= -4p^2 - 16.\end{aligned}$$

Příklad 6. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující podmínky

- existuje $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(a) \neq 0$,
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + f(1)$,
- $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x) + 2f(y) - f(1)$.

Návodné příklady

Příklad 7. V oboru nezáporných reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 + xy + xz - yz &= -2, \\y^2 + xy + yz - xz &= 3, \\z^2 + xz + yz - xy &= 6.\end{aligned}$$

Příklad 8. V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x^2 - |x| &= |yz|, \\y^2 - |y| &= |zx|, \\z^2 - |z| &= |xy|.\end{aligned}$$

Příklad 9. Řešte následující rovnice (ne jako soustavu) v oboru reálných čísel:

$$\begin{aligned}26x^2 + 29y^2 + 5z^2 - 4xy - 10yz - 20xz &= 0, \\(4x + 7y + z)^2 &= 66(x^2 + y^2 + z^2), \\(4x + y + 3)^2 &= 26(x^2 + y^2 + 1).\end{aligned}$$

Příklad 10. Určete všechny funkce $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ splňující podmínky

- existuje $a \in \mathbb{Z}$ takové, že $f(a) \neq 0$,
- $f(x - y + z) = f(x) - f(y) + f(z)$,
- $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - f(x) - f(y) + f(x - y) + f(y - x)$.

Řešení 1. Odečteme druhou rovnici od první, třetí od druhé a první od třetí. Dostáváme

$$\begin{aligned}x^2 - z^2 - (x - z) &= (x - z)(x + z - 1) = 0, \\y^2 - x^2 - (y - x) &= (y - x)(y + x - 1) = 0, \\z^2 - y^2 - (z - y) &= (z - y)(z + y - 1) = 0.\end{aligned}$$

Stačí rozebrat, které závorky se v součinném tvaru nulují.

- Necht $x = y = z$, pak nám každá z původních zadaných rovnic přejde do tvaru

$$2x^2 + x - 2 = 0.$$

Kvadratickou rovnici vyřešíme a dostáváme dvě řešení $x = y = z = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$.

- Necht $x = y$ a $x + z = y + z = 1$, pak můžeme dosadit do původních rovnic za y a z . Dostáváme

$$\begin{aligned}2x^2 + (1 - x) &= 2, \\x^2 + (1 - x)^2 + x &= 2, \\x^2 + (1 - x)^2 + x &= 2.\end{aligned}$$

Při bližším pohledu zjistíme, že se jedná o stejnou rovnici

$$2x^2 - x - 1 = 0,$$

kterou snadno vyřešíme a dostáváme dvě řešení: $x = 1$ a $x = \frac{-1}{2}$, snadno dopočítáme zbylé proměnné. Stejným způsobem vyřešíme případy, kdy $x = z \neq y$ a $y = z \neq x$.

- Poslední případ je, kdy $x \neq y \neq z \neq x$ a $x + z = y + x = y + z = 1$, což ale nemůže nastat.

Jako řešení dostáváme trojice

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right), \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right), \\&\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1).\end{aligned}$$

Řešení 2. Nejprve uděláme odhad

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} \geq \frac{a^2 + b^2}{ab},$$

který jistě pro všechna přirozená čísla a, b platí. Nyní dokážeme, že

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{4\sqrt{ab}}{a + b}.$$

Jednoduchou úpravou převedeme nerovnost do tvaru

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}^3, \\ Q^2(a, b) \cdot A(a, b) \geq G^3(a, b),$$

kde Q, A, G značí kvadratický, aritmetický a geometrický průměr. Protože $Q \geq A \geq G$, je tímto nerovnost dokázána.

Nyní budeme chtít ukázat, kdy nastane rovnost, tj.

$$\frac{a^3 + b^2}{ab} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{4\sqrt{ab}}{a + b}.$$

Víme, že pravá rovnost nastane právě tehdy, když $a = b$. Levá rovnost nastane, právě když $a = 1$. Celkem tedy rovnost nastává, právě když $a = b = 1$.

Řešení 3. Protože jsou $x, y, z, t > 0$, můžeme první rovnici podělit yz a třetí tx . Dostáváme

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = 2,$$
$$\frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 2.$$

Tyto dvě rovnice sečteme a dostáváme

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x} = 4.$$

Použitím AG nerovnosti dostáváme

$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{t} + \frac{t}{x}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{t} \cdot \frac{t}{x}} = 1.$$

Rovnost nastává právě tehdy, když $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{t} = \frac{t}{x} = 1$, tj. $x = y = z = t$. Dosazením do zadání snadno ověříme platnost i druhých dvou rovnic.

Řešení 4. • Nejprve dokážeme, že $x \neq 0$. Postupujme sporem, tj. předpokládáme, že $x = 0$, pak přejde soustava do tvaru

$$\begin{aligned}y^2 - y &= 0, \\2y &= 0, \\3y^2 - 3y &= 0.\end{aligned}$$

Odtud nutně $y = 0$ a odmocnina ve jmenovateli je tvaru $\sqrt{-z^2}$, což je spor.

- Sporem dokážeme, že $y \neq 1$. Kdyby totiž $y = 1$, pak je soustava ve tvaru

$$\begin{aligned}x(2 - z) &= 0, \\ \frac{3x^2}{\sqrt{x^2 - (z - 2)^2}} - x + 2 &= 0, \\ 2x(z - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Již z předchozího víme, že $x \neq 0$, proto $z = 2$. Druhá rovnice pak přejde do tvaru

$$3|x| - x + 2 = 0,$$

kde ale levá strana rovnice je vždy kladná. Tedy $y \neq 1$.

- Vydělíme první a třetí rovnici $x \cdot (y - 1)$ a druhou x . Dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x^2 - (z - 2y)^2}} + \frac{y}{x} + \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y - 1} &= 0, \\ \frac{3x}{\sqrt{x^2 - (z - 2y)^2}} + 2\frac{y}{x} &= 1, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 - (z - 2y)^2}} + 3\frac{y}{x} + \frac{-2y^2 + 2z - 11y + 9}{y - 1} &= 0\end{aligned}$$

- Provedeme substituci

$$a = \frac{x}{\sqrt{x^2 - (z - 2y)^2}}, \quad b = \frac{y}{x}, \quad c = \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y - 1}.$$

Dostáváme

$$\begin{aligned}a + b + c &= 0, \\ 3a + 2b &= 1, \\ a + 3b - 2c &= 7.\end{aligned}$$

Vyřešíme tuto soustavu a máme jediné řešení: $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$.

- Z rovnosti

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - (z - 2y)^2}} = -1$$

dostáváme, že $x < 0$ a $z = 2y$. Dále z $\frac{y}{x} = 2$ máme $y = 2x$. Dosadíme za c

$$c = \frac{y^2 + 2y - z - 1}{y - 1} = \frac{4x^2 + 4x - 4x - 1}{2x - 1} = 2x + 1 = -1.$$

Celkem máme jediné řešení

$$(-1, -2, -4).$$

Řešení 5. Upravíme všechny tři rovnice do tvaru, ve kterém budeme moci aplikovat Cauchyho-Schwarzovu nerovnost, tj.

$$\begin{aligned}(x + 2y + 3z)^2 &= 14(x^2 + y^2 + z^2), \\ (4y + 6z + 5t)^2 &= 77(y^2 + z^2 + t^2), \\ (2x + pt + 3 \cdot 2)^2 &= (p^2 + 13)(x^2 + t^2 + 2^2).\end{aligned}$$

Nyní stačí určit, kdy v Cauchyho-Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. Z prvních dvou rovnic hned dostaneme, že pokud by měla být některá z neznámých rovna nule, pak by musely být rovny nule všechny, což vylučuje poslední rovnici. Rovnice nám tedy postupně dají

$$\begin{aligned}x : y : z &= 1 : 2 : 3, \\ y : z : t &= 4 : 6 : 5, \\ x : t : 2 &= 2 : p : 3.\end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic máme, že $x : z : t = 2 : 6 : 5$, odkud plyne $p = 5$. Z poslední rovnice dostáváme $x : 2 = 2 : 3$, tj. $x = \frac{4}{3}$, ze získaných poměrů snadno dopočítáme další neznámé.

Soustava má řešení pouze pro $p = 5$ a to

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{8}{3}, \quad z = 4, \quad t = \frac{10}{3}.$$

Řešení 6. Zkusíme dosazovat konkrétní hodnoty za x a y do zadaných vztahů

- Položme $x = 0$, $y = 1$, pak

$$\begin{aligned}f(0 \cdot 1) &= f(0)f(1) - f(0) - f(1) + f(1), \\f(0)(f(1) - 2) &= 0.\end{aligned}$$

Rozmysleme případ, kdy $f(0) = 0$. Uvažme proto $x = 0$ a y je libovolné, pak

$$\begin{aligned}f(0 \cdot y) &= f(0)f(y) - f(0) - f(y) + f(1), \\f(1) &= f(y),\end{aligned}$$

To nám dá $f(y) = 0$ pro libovolné y , což je spor s první podmínkou, proto

$$f(1) = 2.$$

- Položme $x = 1$, $y = 0$, pak

$$\begin{aligned}f(1 + 0) + f(1 - 0) &= 2f(1) + 2f(0) - f(1), \\f(0) &= 1.\end{aligned}$$

Dále uvažme $x = y = 1$

$$\begin{aligned}f(1 + 1) + f(1 - 1) &= 2f(1) + 2f(1) - f(1), \\f(2) &= 5.\end{aligned}$$

- Nyní uvažme x libovolné a $y = 1$

$$\begin{aligned}f(x + 1) + f(x - 1) &= 2f(x) + 2f(1) - f(1), \\f(x + 1) &= 2f(x) - f(x - 1) + 2, \\f(x - 1) &= 2f(x) - f(x + 1) + 2.\end{aligned}$$

Toto vyjádření nám (spolu s počátečními podmínkami $f(1) = 2$ a $f(0) = 1$) dává jednoznačnost řešení, tj. když vhodnou funkci uhodneme, již víme, že bude jediným hledaným řešením.

- Vyčíslíme funkci v několika bodech pomocí předchozích vzorců

$$\begin{array}{ll}f(1) = 2, & f(-1) = 2, \\f(2) = 5, & f(-2) = 5, \\f(3) = 10, & f(-3) = 10, \\f(4) = 17, & f(-4) = 17, \\f(5) = 26, & f(-5) = 26.\end{array}$$

Vidíme, že zatím vždy platí $f(x) = x^2 + 1$, zkusme tento vztah dokázat.

1. Vyčísleme $f(-x)$ jako $f(-1 \cdot x)$, když víme, že $f(1) = f(-1)$:

$$f(-x) = f(-1)f(x) - f(-1) - f(x) + f(1) = f(x).$$

Funkce je tedy sudá. Dokažme rekurentní vztah indukci. Víme, že $f(1) = 2$. Předpokládejme, že $f(n) = n^2 + 1$, pak

$$f(n+1) = 2f(n) - f(n-1) + 2 = 2n^2 + 2 - n^2 + 2n - 2 + 2 = (n+1)^2 + 1.$$

2. Druhá možnost je ukázat, že funkce $f(x) = x^2 + 1$ splní tři zadané podmínky. Z jednoznačnosti pak bude toto naše hledaná funkce. První podmínka je splněna triviálně a platí

$$\begin{aligned}(xy)^2 + 1 &= (x^2 + 1)(y^2 + 1) - (x^2 - 1) - (y^2 - 1) + 2, \\ (x+y)^2 + 1 + (x-y)^2 + 1 &= 2x^2 + 2y^2 + 2.\end{aligned}$$

Existuje jediná funkce splňující zadání a to $f(x) = x^2 + 1$.

Řešení 7. Sečtěme postupně první rovnici s druhou, druhou s třetí a třetí s první. Dostáváme

$$x^2 + 2xy + y^2 = 1,$$

$$y^2 + 2yz + z^2 = 9,$$

$$z^2 + 2xz + x^2 = 4.$$

Protože x, y, z jsou nezáporná čísla, je odmocnění ekvivalentní úprava.

$$x + y = 1,$$

$$y + z = 3,$$

$$x + z = 2.$$

Odtud snadno dostáváme jediné řešení soustavy

$$(0, 1, 2).$$

Řešení 9. První rovnici upravíme do tvaru

$$(2x + 1y + 5z)^2 = 30(x^2 + y^2 + z^2)$$

a použijeme Cauchyho-Schwarzovu nerovnost. Rovnost nastává právě když

$$x = 2\lambda, \quad y = \lambda, \quad z = 5\lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

U druhé rovnice je vidět řešení ihned po použití Cauchyho-Schwarzovy nerovnosti:

$$x = 4\lambda, \quad y = 7\lambda, \quad z = \lambda \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Podobně u třetí rovnice dostaneme $x = 4\lambda$, $y = \lambda$ a $1 = 3\lambda$. Vidíme, že $\lambda = \frac{1}{3}$, tedy

$$x = \frac{4}{3}, \quad y = \frac{1}{3}.$$

Řešení 10. Zkusíme dosazovat konkrétní hodnoty za x a y do zadaných vztahů

- $x = y = 0$

$$\begin{aligned}f(0 \cdot 0) &= f(0) f(0), \\f(0) (f(0) - 1) &= 0.\end{aligned}$$

Je-li $f(0) = 0$, pak pro libovolné $x \in \mathbb{Z}$ platí

$$f(x \cdot 0) = -f(x) + f(x) + f(-x) = f(-x),$$

což je spor s první podmínkou. Proto

$$f(0) = 1.$$

- $y = 0$ a x je libovolné

$$\begin{aligned}f(x \cdot 0) &= f(x) - f(x) - 1 + f(x) + f(-x), \\f(x) + f(-x) &= 2.\end{aligned}$$

- Uvažme $x = y = -1$, pak s využitím předchozího zjištění dostáváme

$$\begin{aligned}f(1) &= f(-1) f(-1) - 2f(-1) + 2 \\f(-1) (f(-1) - 1) &= 0.\end{aligned}$$

- Je-li $f(-1) = 1$, pak také $f(1) = 1$. Dosadíme do součtového vzorce

$$\begin{aligned}f(x+1) &= f(x-0+1) = f(x) - 1 + 1 = f(x), \\f(x-1) &= f(x-1+0) = f(x) + 1 - 1 = f(x).\end{aligned}$$

Dostáváme tedy jedno možné řešení

$$f(x) = 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

- Je-li $f(-1) = 0$, pak $f(1) = 2$. Dosadíme do součtového vzorce

$$\begin{aligned}f(x+1) &= f(x-0+1) = f(x) - 1 + 2 = f(x) + 1, \\f(x-1) &= f(x-1+0) = f(x) - 2 + 1 = f(x) - 1.\end{aligned}$$

Zřejmá indukce nám dá druhé řešení (využíváme vztahu $f(0) = 1$)

$$f(x) = x + 1 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{Z}.$$

Zadání splňují právě dvě funkce

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = x + 1.$$