

Příklad 1 (SNMÚ). Uvažte dvě přirozená čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ zapsaná v číselné soustavě o základu z , kde $z \geq 7$ je přirozené číslo. Určete všechny hodnoty z , pro něž jsou čísla $(15)_z$ a $(26)_z$ nesoudělná.

Příklad 2 (MO - A52ii - 1). Najděte základy z všech číselných soustav, ve kterých $(41)_z$ dělí $(1001)_z$.

Příklad 3 (MO - A52i - 4). Určete všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že v některé číselné soustavě o základu $z \geq 5$ platí následující kritérium dělitelnosti: trojmístné číslo $(abc)_z$ je dělitelné číslem n , právě když je číslem n dělitelné číslo $c + 3b - 4a$.

Příklad 4 (MO - A51iii - 3). Dokažte, že dané přirozené číslo A je druhou mocninou některého přirozeného čísla, právě když pro každé přirozené n je aspoň jeden z rozdílů

$$\begin{aligned} (A+1)^2 - A, \\ (A+2)^2 - A, \\ (A+3)^2 - A, \\ \vdots \\ (A+n)^2 - A \end{aligned}$$

dělitelný číslem n .

Příklad 5 (MO - A54ii - 2). V oboru celých čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x(y+z+1) &= y^2 + z^2 - 5, \\ y(z+x+1) &= z^2 + x^2 - 5, \\ z(x+y+1) &= x^2 + y^2 - 5. \end{aligned}$$

Příklad 6 (MO - A54ii - 4). Najděte všechny dvojice přirozených čísel, jejichž součet má poslední cifru 3, rozdíl je prvočíslo a součin je druhou mocninou přirozeného čísla.

Příklad 7 (MO - A58i - 3). Najděte všechny dvojice přirozených čísel x, y takové, že

$$\frac{xy^2}{x+y}$$

je prvočíslo.

Příklad 8 (MO - A58ii - 1). Hledané čtyřmístné přirozené číslo je dělitelné sedmi. Zapišeme-li jeho číslice v opačném pořadí, dostaneme větší číslo, které je také dělitelné sedmi. Navíc při dělení číslem 37 dávají obě zmíněná čtyřmístná čísla stejný zbytek. Určete původní čtyřmístné číslo.

Příklad 9 (MO - A59ii - 3). Určete všechna přirozená čísla m, n taková, že $n \mid 2m - 1$ a $m \mid 2n - 1$.

Příklad 10. Řešte následující diofantické rovnice

$$\begin{array}{ll} 2^x = 1 + 3^y & v \mathbb{Z}^2 \\ x + y + z = xyz & v \mathbb{N}^3 \\ 6(x - y) = xy & v \mathbb{N}^2 \\ y^3 - x^3 = 91 & v \mathbb{Z}^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p} & v \mathbb{Z}^2, \text{ kde } p \text{ je prvočíselný parametr} \end{array}$$

Příklad 11 (MO - A47i - 1). Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: 2^{n+2} \mid 2013^{2^n} - 1 \wedge 2^{n+3} \nmid 2013^{2^n} - 1$.

Příklad 12 (MO - A47ii - 1). Dokažte: $3^{n+3} \mid 1997^{3^n} + 1$.

Příklad 13 (MO - A48ii - 1). Aritmetický průměr několika navzájem různých prvočísel se rovná 27. Určete, jaké největší prvočíslu mezi nimi může být.

Příklad 14 (SNMÚ). Dokažte: $\forall n \in \mathbb{N}: n \mid 3^n - 2 \Rightarrow 3^n - 1 \mid 3^{3^n-1} - 3$.

Příklad 15 (SNMÚ). Najděte všechny pravoúhlé trojúhelníky s obvodem 180, jejichž délky stran jsou vyjádřeny přirozenými čísly.

Příklad 16. Dokažte, že číslo $5^n + 7^n + 13^n$ je složené pro každé přirozené číslo n .

Příklad 17. Dokažte, že v posloupnosti $(2^n - 3)_{n=0}^{\infty}$ je nekonečně mnoho násobků 5 a nekonečně mnoho násobků 13, ale žádný násobek 65.