

Návodné příklady

Návodný příklad 5.1. Před symbol „ $=$ “ doplňte libovolné vhodné funkční symboly (matematické operace) a závorky tak, aby platilo

$$1\ 1\ 1 = 6$$

$$2\ 2\ 2 = 6$$

$$3\ 3\ 3 = 6$$

$$4\ 4\ 4 = 6$$

$$5\ 5\ 5 = 6$$

$$6\ 6\ 6 = 6$$

$$7\ 7\ 7 = 6$$

$$8\ 8\ 8 = 6$$

$$9\ 9\ 9 = 6$$

přičemž nesmíte doplnit žádné číslo.

(Například pro $7\ 7\ 7 = 2$ doplníme $+$ a $:$ spolu se závorkami takto: $(7 + 7) : 7 = 2$.)

Návodný příklad 5.2. V každém z k měšců je n bílých a m černých kuliček. Z prvního měšce náhodně vytáhneme jednu kuličku a vložíme ji do druhého. Pak z druhého měšce náhodně vytáhneme opět jednu kuličku a vložíme ji do třetího atd. Určete, jaká je pravděpodobnost toho, že z posledního (k -tého) měšce vytáhneme bílou kuličku.

Řešení. Označme p_i ($i = 1, \dots, k$) pravděpodobnost, že z i -tého měšce vytáhneme (po přemístění kuliček podle textu úlohu) bílou kuličku. Zřejmě platí

$$p_1 = \frac{m}{m+n}.$$

Do i -tého měšce přeneseme z předešlého buď bílou nebo černou kuličku. V případě, že přenesená kulička byla bílá, je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z i -tého měšce

$$p_{i-1} \cdot \frac{n+1}{m+n+1},$$

v případě, že přenesená kulička byla bílá, pak

$$(1 - p_{i-1}) \cdot \frac{n}{m+n+1}.$$

Jelikož jde o návzájem nezávislé jevy, je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z i -tého měšce rovna součtu těchto pravděpodobností, tj.

$$p_i = p_{i-1} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + (1 - p_{i-1}) \cdot \frac{n}{m+n+1}.$$

Pro $i = 2$ je pravděpodobnost vytažení bílé kuličky z druhého měšce rovna

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + (1 - p_1) \cdot \frac{n}{m+n+1} = \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n+1}{m+n+1} + \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \cdot \frac{n}{m+n+1} = \\ &= \frac{m}{m+n} = p_1 \end{aligned}$$

Užitím principu matematické indukce dále dostáváme

$$p_k = p_{k-1} = \dots = p_2 = p_1 = \frac{m}{m+n}.$$



Návodný příklad 5.3. V každém vrcholu pravidelného 2014úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout

- na 1007 hromádek po 2 mincích,
- na 2 hromádky po 1007 mincích.

Řešení. Viz Příklad 5.3. ■

Návodný příklad 5.4. Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Označme dále a_n počet všech slov délky n končících na A , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Dokažte

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \text{ platí: } p_n = a_n + a_{n+2}.$$

Návodný příklad 5.5. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $n \geq 3$ lze rozřezat rovnostranný trojúhelník na n trojúhelníků, z nichž každý je rovnoramenný (či rovnostranný).

Návodný příklad 5.6. Knihař má svázat 12 různých knih do desek červené, hnědé a modré barvy. Kolika způsoby to může provést, má-li materiálu každé barvy použít na vazbu alespoň jedné knihy?

Řešení. Každý možný způsob svázání si můžeme představit jako 12-prvkovou variaci s opakováním ze tří prvků (barev).

Označme K_i množinu všech takových svázání, ve kterých není žádná kniha svázána do desek i -té barvy, $i = \{1, 2, 3\}$, tedy všechna nepovolená svázání tvoří množinu $K_1 \cup K_2 \cup K_3$. Dále označme K množinu všech povolených svázání. Jelikož všech možných svázání bez jakýchkoliv podmínek je 3^{12} , platí:

$$K = 3^{12} - |K_1 \cup K_2 \cup K_3|.$$

$|K_1 \cup K_2 \cup K_3|$ spočítáme principem inkluze a exkluze. Pro $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq 3$ množina $K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_r}$ obsahuje ta svázání, která neobsahují žádnou z r pevně vybraných barev desek. Pro každou knihu pak máme $3 - r$ možností na barvu desek, čili

$$|K_{j_1} \cap \dots \cap K_{j_r}| = (3 - r)^{12}.$$

Jak vidno, tento počet nezávisí na tom, jaké konkrétní barvy jsme zakázali, ale jen na jejich počtu. Ze speciálního případu principu inkluze a exkluze tedy dostáváme

$$|K_1 \cup K_2 \cup K_3| = \sum_{r=1}^3 (-1)^{r+1} \binom{3}{r} (3 - r)^{12}.$$

Celkem pak

$$K = 3^{12} - \sum_{r=1}^3 (-1)^{r+1} \binom{3}{r} (3 - r)^{12} = \sum_{r=0}^3 (-1)^r \binom{3}{r} (3 - r)^{12} = 519\,156.$$

■

Soutěžní příklady

Příklad 5.1. Uvažme rovnice

$$a_1 \circ_1 a_1 \bullet_1 a_1 = n,$$

$$a_2 \circ_2 a_2 \bullet_2 a_2 = n,$$

$$\vdots$$

$$a_k \circ_k a_k \bullet_k a_k = n,$$

kde $n, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{N}$, pro každé $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je $\circ_i, \bullet_i \in \{+, -, \cdot, : \}$ a pro $i \neq j$ je $a_i \neq a_j$.

- Určete největší $k \in \mathbb{N}$, pro které lze doplnit do každé z k rovnic za $\circ_i$ a $\bullet_i$ některou z operací $+, -, \cdot, :$ tak, aby všechny rovnice platily.
- Pro takové k určete nejmenší možné $n \in \mathbb{N}$.

Například snadno vidíme, že $k \geq 4$, vždyť

$$1 \circ_1 1 \bullet_1 1 = 3,$$

$$2 \circ_2 2 \bullet_2 2 = 3,$$

$$3 \circ_3 3 \bullet_3 3 = 3,$$

$$4 \circ_4 4 \bullet_4 4 = 3,$$

lze totiž doplnit

$$1 + 1 + 1 = 3,$$

$$2 + 2 : 2 = 3,$$

$$3 + 3 - 3 = 3,$$

$$4 - 4 : 4 = 3.$$

Příklad 5.2.

Na schodišti o n schodech hrajeme následující hru:

- Na začátku si stoupneme na první schod (tj. krokem dolů se dostaneme pod schodiště, $n - 1$ kroky nahoru schodiště vyjdeme).
- Na každém schodu se rozhodujeme: s pravděpodobností p uděláme krok nahoru, v opačném případě (s pravděpodobností $1 - p$) krok dolů.
- Hra končí, dostaneme-li se pod schodiště či jej vyjdeme.

Spočtete s jakou pravděpodobností schodiště vyjdeme, když

- (a) $n = 4$ a $p = \frac{3}{5}$ (chceme se posunout o 3 schody nahoru, přičemž krok nahoru uděláme s pravděpodobností 60%, jinak jdeme dolů),
- (b) n je libovolné a $p = \frac{1}{2}$.

Řešení. Výhrou budeme rozumět situaci, kdy jsme schodiště vyšli, prohrou situaci, kdy jsme z něj sestoupili dolů. Označme p_i pravděpodobnost toho, že vyhrájeme z i -tého schodu. Tuto pravděpodobnost můžeme vyjádřit jako

$$p_i = p \cdot p_{i+1} + (1 - p) \cdot p_{i-1},$$

pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$, kde $p_0 = 0$ a $p_n = 1$. Stačí si totiž uvědomit, že pravděpodobnost, že vyhrájeme z i -tého schodu je vlastně pravděpodobnost, že jsme udělali krok nahoru a vyhrájeme z tohoto schodu, plus pravděpodobnost, že jsme udělali krok dolů a odtud vyhrájeme. Přitom víme, že na n -tém schodu vyhráváme vždy (tj. s pravděpodobností 1) a na „nultém“ schodu vždy prohráváme (tj. vyhráváme s pravděpodobností 0).

(a) Dle předchozího vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{3}{5}p_2 \\p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5}p_1 \\p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}p_2\end{aligned}$$

Dosadíme p_1 za p_2 do druhé rovnice a odtud vyjádříme p_2 v závislosti na p_3

$$\begin{aligned}p_2 &= \frac{3}{5}p_3 + \frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)p_2 \\ \frac{19}{25}p_2 &= \frac{3}{5}p_3 \\ p_2 &= \frac{15}{19}p_3\end{aligned}$$

Nyní dosadíme do poslední rovnice za p_2 a spočítáme p_3 .

$$\begin{aligned}p_3 &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{15}{19}p_3\right) \\ \frac{13}{19}p_3 &= \frac{3}{5} \\ p_3 &= \frac{57}{65}\end{aligned}$$

A zpětně vyjádříme hledanou hodnotu p_1

$$p_1 = \frac{3}{5}p_2 = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot p_3\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{15}{19} \cdot \frac{57}{65}\right) = \frac{27}{65}.$$

(b) Opět vytvoříme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}p_1 &= \frac{1}{2}p_2 \\ p_2 &= \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_1 \\ p_3 &= \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_2 \\ &\vdots \\ p_{n-2} &= \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{2}p_{n-3} \\ p_{n-1} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p_{n-2}\end{aligned}$$

a postupně dosazujeme

$$p_2 = \frac{1}{2}p_3 + \frac{1}{4}p_2$$

$$p_2 = \frac{2}{3}p_3$$

$$p_3 = \frac{1}{2}p_4 + \frac{2}{6}p_3$$

$$p_3 = \frac{3}{4}p_4$$

$$p_4 = \frac{1}{2}p_5 + \frac{3}{8}p_4$$

$$p_4 = \frac{4}{5}p_5$$

Všimněme si, že $p_i = \frac{i}{i+1}p_{i+1}$. Dokažme toto tvrzení obecně indukcí.

Zjevně pro $i = 1$ tvrzení platí.

Nechť tvrzení platí pro $k - 1$, tj. $p_{k-1} = \frac{k-1}{k}p_k$, pak

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}p_{k-1}$$

$$p_k = \frac{1}{2}p_{k+1} + \frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{k}p_k\right)$$

$$\frac{k+1}{2k}p_k = \frac{1}{2}p_{k+1}$$

$$p_k = \frac{k}{k+1}p_{k+1}$$

tím je tvrzení dokázáno. Odtud dostáváme, že $p_{n-1} = \frac{n-1}{n}p_n = \frac{n-1}{n}$. Sečtením všech rovnic původní soustavy dostáváme

$$\frac{1}{2}(p_1 + p_{n-1}) = \frac{1}{2},$$

tedy $p_1 = 1 - p_{n-1}$. Odtud

$$p_1 = \frac{1}{n}.$$



Příklad 5.3.

- (a) V každém vrcholu pravidelného 2016úhelníku leží právě jedna mince. Vybereme dvě mince a přemístíme každou z nich do sousedního vrcholu tak, že jedna se posune ve směru a druhá proti směru hodinových ručiček. Rozhodněte, zda je možno tímto způsobem všechny mince postupně přesunout
- na 32 hromádek po 63 mincích,
 - na 16 hromádek po 126 mincích,
 - na 63 hromádek po 32 mincích.
- (b) Místo 2016úhelníku nyní uvažujte pravidelný n -úhelník a rozhodněte, pro která $r, s \in \mathbb{N}$, $r \cdot s = n$, je možné mince přesunout
- na r hromádek po s mincích.

Řešení. Budeme řešit druhou část (první z ní pak plyne). Rozebereme případy dle parity čísel r, s .

- Jestliže $2 \nmid s$, pak rozdělíme n -úhelník na r „výsečí“ délky s , kde „výsečí“ rozumíme s po sobě jdoucích vrcholů. Protože je délka této „výseče“ lichá, stačí přesouvat mince zároveň od obou krajů směrem ke středovému vrcholu. Každý přesun jedné dvojice mincí posouvá jednu minci ve směru a druhou proti směru hodinových ručiček (tj. tuto úvahu skutečně můžeme udělat pro každou výseč zvlášť). Každá „výseč“ nám pak dá jednu hromádku po s mincích, celkem nám všechny výseče dají požadovaných r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \mid r$, pak uvažme osu souměrnosti tohoto mnohoúhelníka, která neprochází žádným vrcholem. Tím se nám mnohoúhelník rozpadne na dvě části. Když posuneme minci v jedné části a v druhé uděláme osově souměrný posun, bude právě jeden z těchto posunů ve směru hodinových ručiček. Díky tomu stačí v jedné polovině posouvat mincemi naprosto libovolně tak, abychom dostali $\frac{r}{2}$ hromádek po s mincích a v druhé polovině nám příslušné osově souměrné posuny dají totéž. Tím získáme r hromádek po s mincích.
- Jestliže $2 \nmid r$ a $2 \mid s$, pak budeme chtít dokázat, že mince přesunout požadovaným způsobem nelze. Označme vrcholy po řadě $1, 2, \dots, n$, dále $m(i)$ necht' je počet mincí ve vrcholu i a nakonec

$$S = \sum_{i=1}^n i \cdot m(i).$$

Protože v každém kroku jednu minci posuneme po směru a jednu proti směru hodinových ručiček, hodnota S se modulo n nemění (tj. zbytek po dělení čísla S číslem n se posunutím mincí nemění). Snadno spočítáme počáteční hodnotu S jako

$$S_1 = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

a hodnotu S pro situaci, kdy máme r hromádek po s mincích jako

$$S_2 = s \sum_{i=1}^r x_i,$$

kde $x_1, \dots, x_r \in \{1, 2, \dots, n\}$ říkají, ve kterých vrcholech se tyto hromádky nacházejí. Kdyby přesunout mince požadovaným způsobem šlo, pak čísla S_1 a S_2 dávají stejný zbytek po dělení číslem n , tj. platí $n \mid S_1 - S_2$. Odtud bychom dostali

$$\begin{aligned} n \mid \frac{n(n+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i &\Leftrightarrow rs \mid \frac{rs(rs+1)}{2} - s \sum_{i=1}^r x_i \Leftrightarrow 2r \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \\ &\Rightarrow 2 \mid r(rs+1) - 2 \sum_{i=1}^r x_i \Rightarrow 2 \mid r(rs+1) \end{aligned}$$

což je spor (vždyť $2 \nmid r$ a $2 \mid s$).

■

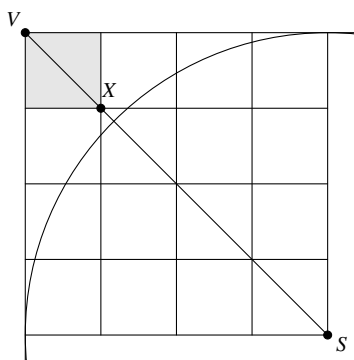
Příklad 5.4.

- Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BBB ani ABA . Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která jsou čísla p_{n-1} , p_n a p_{n+1} sudá.
- Pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ sestavme z písmen A a B všechna možná slova délky n (slovem rozumíme libovolnou konečnou posloupnost písmen A a B). Označme p_n počet všech slov délky n , která neobsahují podslova AAA , BB . Nalezněte všechna $n \in \mathbb{N}$, pro která jsou čísla p_n a p_{n+1} dělitelná třemi.

Příklad 5.5. Je dáno 1300 bodů uvnitř jednotkové koule. Dokažte, že existuje koule o poloměru $\frac{2}{9}$, uvnitř které leží aspoň 4 dané body.

Řešení. Uvažujme krychli o hraně délky 2, do níž je vepsána daná koule o poloměru 1. Tuto krychli rozdělíme na $8^3 = 512$ shodných krychlíček, z nichž každá má hranu délky $\frac{1}{4}$. Každou z krychlíček lze vepsat do koule o poloměru $\frac{2}{9}$, neboť poloviny délky tělesové úhlopříčky $\frac{1}{8}\sqrt{3} < \frac{2}{9}$. Uvažujme řez viz obrázek 5.1.

Protože



Obrázek 5.1: Řez

$$|SX| = \frac{3}{4}|SV| = \frac{3}{4}\sqrt{2} > 1,$$

nemá žádná z malých krychliček, které leží podél hran větší krychle, žádný společný bod s danou jednotkovou koulí. Těchto krychliček je celkem $6 \cdot 12 + 8 = 80$. Ve sjednocení zbylých 432 krychliček tedy leží celá daná jednotková koule.

Protože všech 1300 daných bodů leží uvnitř těchto 432 krychliček a $1300 = 432 \cdot 3 + 4$, existuje mezi nimi podle Dirichletova principu aspoň jedna, která obsahuje aspoň 4 z daných bodů, přičemž, jak víme, můžeme takovou krychličku vepsat do koule o poloměru $\frac{2}{9}$. ■

Příklad 5.6. Určete počet rozmístění k věží na šachovnici $n \times n$ tak, aby aspoň jedna z nich byla neohrožená a žádné dvě nestály v témže sloupci.

Řešení. Pro $k > n$ zřejmě žádné rozmístění neexistuje.

Dále nechť $k \leq n$.

Sloupce $s_1, \dots, s_k$, v nichž budou věže umístěny, lze vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Zbývá určit, kolika způsoby lze rozmístit k věží na šachovnici o n řádcích a k sloupcích $s_1, \dots, s_k$ tak, aby v každém sloupci stála právě jedna věž a zároveň alespoň v jedno z řádků stála právě jedna věž. Pro libovolné $i \in \{1, \dots, n\}$ označme T_i množinu všech takových rozmístění věží, kdy v i -tém řádku, a v každém sloupci, stojí právě jedna věž. Všechna povolená rozmístění pak tvoří množinu $T_1 \cup \dots \cup T_k$. Pro $1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq k$ množina $T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r}$ obsahuje ta rozmístění, kde v r pevně vybraných řádcích stojí vždy právě jedna věž.

Pro $r \leq k$ můžeme vybrat sloupce, na kterých budou stát $k \cdot (k-1) \cdots (k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}$ způsoby. Zbylých $k-r$ věží můžeme umístit po jedné na zbylé sloupce, libovolně na zbylých $n-r$ řádků, což můžeme udělat $(n-r)^{k-r}$ způsoby, přičemž pro $r = k = n$ klademe $0^0 = 1$. Celkem

$$|T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r}| = \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

Dále pro $r > k$ zřejmě žádné takové rozmístění neexistuje, tedy $T_{j_1} \cap \dots \cap T_{j_r} = \emptyset$.

Celkem pak ze speciálního případu principu inkluze a exkluze dostáváme

$$|T_1 \cup \dots \cup T_k| = \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

Hledaný počet všech rozmístění je pak

$$\binom{n}{k} \cdot \sum_{r=1}^k (-1)^{r+1} \binom{n}{r} \frac{k!}{(k-r)!} (n-r)^{k-r}.$$

■