

Kapitola 8

Diofantické rovnice

Jedná se o rovnice, u nichž hledáme pouze celočíselná řešení. Dá se dokázat, že neexistuje (a ani existovat nemůže) žádný univerzální postup řešení. Existují však různé metody, které nám v řadě konkrétních případů pomohou řešení nalézt.

8.1 Lineární diofantické rovnice

V této části se budeme zabývat speciální třídou diofantických rovnic, pro kterou univerzální postup řešení existuje.

Definice. Diofantickou rovnici ve tvaru

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

pro neznámé $x_1, \dots, x_n$ a daná čísla $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{Z}$, nazveme *lineární diofantickou rovnici*.

Věta. Diofantická rovnice o n proměnných, kde $(a_1, \dots, a_n) = 1$, má vždy řešení v $\mathbb{Z}$ a všechna řešení je možné popsat pomocí $n - 1$ celočíselných parametrů.

Místo důkazu této věty si celý postup předvedeme na konkrétním příkladu.

Příklad. Řešte v $\mathbb{Z}$

$$18x + 20y + 15z = 1$$

Řešení. Nejprve si zvolíme jednu proměnnou a spočítáme největšího společného dělitele koeficientů všech ostatních. Na diofantickou rovnici se pak podíváme modulo toto číslo. V našem případě zvolme jako tuto proměnnou například x . Pak $(20, 15) = 5$. Když se podíváme na rovnici modulo 5, dostáváme

$$18x \equiv 1 \pmod{5}$$

$$3x \equiv 6 \pmod{5}$$

$$x \equiv 2 \pmod{5}$$

$$x = 2 + 5t$$

Dosadíme do zadané rovnice a vykrátíme

$$20y + 15z = 1 - 18 \cdot 2 - 18 \cdot 5t$$

$$4y + 3z = -7 - 18t$$

Nyní celý postup opakujeme. Vybereme proměnnou y , pak největší společný dělitel koeficientů u zbývajících proměnných je 3. Dostáváme

$$y \equiv -1 \pmod{3}$$

$$y = -1 + 3s$$

Dosadíme a vykrátíme

$$3z = -3 - 18t - 12s$$

$$z = -1 - 6t - 4s$$

Řešením jsou trojice

$$(x, y, z) \in \{(2 + 5t, -1 + 3s, -1 - 6t - 4s) \mid s, t \in \mathbb{Z}\}$$

8.2 Příklady

Příklad 1. Je možné na dvouramenných vahách (ramena stejné délky) odvážit 1 g nějakého zboží, máme-li k dispozici pouze (libovolný počet) závaží tří hmotností: 153 g, 135 g a 425 g? Pokud ano, jak to udělat? Vhodným způsobem запиšte všechna možná řešení.

Příklad 2. Řešte diofantickou rovnici

$$7x^2 + 5y + 13 = 0$$

Příklad 3. Řešte diofantickou rovnici

$$x^2 + 4z^2 + 6x + 7y + 8z = 1$$

Příklad 4. Řešte diofantickou rovnici

$$2x^2 + xy = y^2 + 63.$$

Příklad 5. Řešte diofantickou rovnici

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p},$$

kde p je libovolné prvočíslo.

Příklad 6. Řešte diofantickou rovnici

$$3^x = 4y + 5.$$

Příklad 7. Řešte diofantickou rovnici

$$x(y+1)^2 = 243y.$$

Příklad 8. Řešte v oboru přirozených čísel

$$x + y + z = xyz$$

Příklad 9. Řešte diofantickou rovnici

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

Řešení 1. Sestavíme diofantickou rovnici

$$153x + 135y + 425z = 1$$

přičemž kladný počet závaží pokládáme na jedno rameno, záporný počet na druhé, kde je zboží. Jde o lineární diofantickou rovnici, $(153, 135) = 9$.

$$\begin{aligned} 425z &\equiv 1 \pmod{9} \\ 2z &\equiv 10 \pmod{9} \\ z &\equiv 5 \pmod{9} \\ z &= 5 + 9t \end{aligned}$$

$$153x + 135y + 425(5 + 9t) = 1$$

$$153x + 135y = -2124 - 3825t$$

$$\begin{aligned} 135y &\equiv -2124 - 3825t \pmod{153} \\ -18y &\equiv 18 \pmod{153} \\ -6y &\equiv 6 \pmod{51} \\ -2y &\equiv 2 \pmod{17} \\ y &\equiv -1 \pmod{17} \\ y &= -1 + 17k \end{aligned}$$

$$153x + 135(-1 + 17k) + 425(5 + 9t) = 1$$

$$\begin{aligned} 153x &= -1989 - 2295k - 3825t \\ x &= -13 - 15k - 25t \end{aligned}$$

Množina řešení je tvaru

$$K = \{[-13 - 15k - 25t; -1 + 17k; 5 + 9t], k, t \in \mathbb{Z}\}.$$

Řešení 2. Rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 5.

$$\begin{aligned} 7x^2 + 13 &\equiv 0 \pmod{5} \\ 2x^2 &\equiv -3 \pmod{5} \\ x^2 &\equiv 1 \pmod{5} \\ x &= \pm 1 + 5t \end{aligned}$$

Dosadíme

$$7(\pm 1 + 5t)^2 + 5y + 13 = 5y + 20 \pm 70t + 175t^2$$

Můžeme vyjádřit y a dostaneme řešení ve tvaru

$$[x, y] = [1 + 5t, -35t^2 - 14t - 4] \quad \text{nebo} \quad [x, y] = [-1 + 5t, -35t^2 + 14t - 4].$$

Řešení 3. Všimněme si, že rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 7.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 4z^2 + 8z &\equiv 1 \pmod{7} \\(x+3)^2 + 4(z+1)^2 &\equiv 0 \pmod{7}\end{aligned}$$

Podívejme se na kvadratické zbytky modulo 7.

n	0	1	2	3	4	5	6
n^2	0	1	4	2	2	4	1

Snadno ověříme, že řešení dostáváme jen pro $x+3 \equiv z+1 \equiv 0 \pmod{7}$. Odtud

$$x = -3 + 7t \quad z = -1 + 7s$$

a dosadíme do původní rovnice, abychom získali y .

$$\begin{aligned}7y &= -(x+3)^2 - 4(z+1)^2 + 14 = -49t^2 - 196s^2 + 14 \\y &= -7t^2 - 28s^2 + 2\end{aligned}$$

Řešení 4. Řešíme rozkladem

$$\begin{aligned}2x^2 + xy &= y^2 + 63 \\2x^2 + xy - y^2 &= 63 \\(2x-y)(x+y) &= 63 = 3^2 \cdot 7\end{aligned}$$

Dělitelé 63 jsou $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 9, \pm 21, \pm 63$.

Projdeme postupně všechny možnosti

$2x - y = 63 \ (-63)$	$2x - y = 21 \ (-21)$	$2x - y = 9 \ (-9)$
$x + y = 1 \ (-1)$	$x + y = 3 \ (-3)$	$x + y = 7 \ (-7)$
$3x = 64 \ (-64)$	$3x = 24 \ (-24)$	$3x = 16 \ (-16)$
$3 \nmid 64 \quad \text{NŘ}$	$x = 8 \ (-8)$	$3 \nmid 16 \quad \text{NŘ}$
	$y = -5 \ (5)$	
$2x - y = 1 \ (-1)$	$2x - y = 3 \ (-3)$	$2x - y = 7 \ (-7)$
$x + y = 63 \ (-63)$	$x + y = 21 \ (-21)$	$x + y = 9 \ (-9)$
$3x = 64 \ (-64)$	$3x = 24 \ (-24)$	$3x = 16 \ (-16)$
$3 \nmid 64 \quad \text{NŘ}$	$x = 8 \ (-8)$	$3 \nmid 16 \quad \text{NŘ}$
	$y = 13 \ (-13)$	

$$K = \{[8, -5], [8, 13], [-8, 5], [-8, -13]\}.$$

Řešení 5. Nejprve vynásobíme celou rovnici xy a dostáváme

$$\begin{aligned}xy - px - py &= 0 \\xy - px - py + p^2 &= p^2 \\(x - p)(y - p) &= p^2\end{aligned}$$

Dostáváme 6 možností, které musíme rozebrat (první závorka může být $\pm 1, \pm p, \pm p^2$)

- $x - p = 1$, pak $y - p = p^2$ a dostáváme řešení $[p + 1, p^2 + p]$
- $x - p = p$, pak $y - p = p$ a dostáváme řešení $[2p, 2p]$
- $x - p = p^2$, pak $y - p = 1$ a dostáváme řešení $[p^2 + p, p + 1]$
- $x - p = -1$, pak $y - p = -p^2$ a dostáváme řešení $[p - 1, p - p^2]$
- $x - p = -p$, pak $y - p = -p$ a dostáváme $x = y = 0$, což nevyhovuje zadání
- $x - p = -p^2$, pak $y - p = -1$ a dostáváme řešení $[p - p^2, p - 1]$

Úloha má tedy právě pět řešení.

Řešení 6. Rovnice je lineární v proměnné y . Podívejme se na ni modulo 4.

$$(-1)^x \equiv 1 \pmod{4}$$

Odtud zřejmě $x = 2k$. Dosadíme do původní rovnice a vyjádříme y

$$y = \frac{9^k - 5}{4}.$$

Řešení 7. Z rovnice vyjádříme x

$$x = \frac{243y}{(y+1)^2}$$

Protože $(y, y+1) = 1$, musí $(y+1)^2 \mid 243 = 3^5$, tj. $(y+1) \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Dopočítáme příslušná x :

y	0	-2	2	-4	8	-10
x	0	-486	54	-108	24	-30

Máme tedy 6 řešení.

Řešení 8. Rovnice je symetrická v proměnných x, y, z . Předpokládejme proto, že $x \leq y \leq z$, pak

$$\begin{aligned}xyz &= x + y + z \leq 3z \\xy &\leq 3\end{aligned}$$

Nutně $x = 1$ a $y \in \{1, 2, 3\}$. Tyto případy dořešíme

- $x = y = 1$, pak $z = z + 2$, což je spor s celočíselností z
- $2x = y = 2$, pak $2z = z + 3$, tedy $z = 3$.

- $3x = y = 3$, pak $3z = z + 4$, tedy $z = 2$, což je spor s $y \leq z$.

Dostáváme tedy šest řešení. $(1, 2, 3)$ a všechny permutace.

Řešení 9. Rovnice je symetrická v proměnných x, y . Předpokládejme proto, že $x \leq y$, pak

$$\begin{aligned}x^2y^2 &= x^2 + xy + y^2 \leq 3y^2 \\x^2 &\leq 3\end{aligned}$$

Máme tedy tři možnosti pro x

- $x = 0$, pak $y = 0$
- $x = 1$, pak $y = -1$, což je spor s předpokladem $x \leq y$
- $x = -1$, pak $y = 1$

Dostáváme tři řešení (díky symetrii se nám vrátí vyloučené řešení).

$$K = \{[0, 0], [-1, 1], [1, -1]\}.$$