Cauchy-Riemannovy podmínky: $f(z_0) = u(x_0 + iy_0) + iv(x_0 + iy_0)$

$$u'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0)$$
$$u'_y(x_0, y_0) = -v'_x(x_0, y_0)$$

Elementární funkce - definice goniometrických a hyperbolických funkcí

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{tg } z = \frac{\sin z}{\cos z} \qquad \text{cotg } z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\cosh z = \text{ch } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh z = \text{sh } z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \text{tgh } z = \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z} \qquad \text{cotgh } z = \frac{\text{ch } z}{\text{sh } z}$$

Elementární funkce - vztahy goniometrických a hyperbolických funkcí

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$$

$$\text{ch } z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2} \qquad \text{sh } z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

$$\cos(iz) = \text{ch } z \qquad \text{ch}(iz) = \cos z \qquad \sin(iz) = i \text{ sh } z \qquad \text{sh}(iz) = i \sin z$$

Elementární funkce - logaritmus

$$\text{Log } z = \ln|z| + i \text{ arg } z + 2k\pi$$
$$\log z = \ln|z| + i \text{ arg } z$$

Další elementární funkce - inverzní funkce k funkcím goniometrickým a hyperbolickým

$$\text{Arcsin } z = -i \text{ Log } i\left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \text{Arccos } z = -i \text{ Log } \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \text{Arctan } z = -\frac{i}{2} \text{ Log} \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$\text{Argsh } z = \text{Log } \left(z \pm \sqrt{z^2 + 1}\right) \qquad \text{Argch } z = \text{Log } \left(z \pm \sqrt{z^2 - 1}\right) \qquad \text{Argtgh } z = \frac{1}{2} \text{ Log} \frac{1 + z}{1 - z}$$

Křivkový integrál

$\forall n \in \mathbb{N}, z \in \mathbb{C}, r > 0, \gamma : z = z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$:

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, \mathrm{d}z = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

γ uzavřená cesta, $z_0 \in \mathbb{C} - [\gamma]$:

$$\text{ind}_\gamma z_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z - z_0} \, \mathrm{d}z$$

γ kladně orientovaná Jordanova cesta, f holomorfní funkce v Int γ, spojitá a konečná na $\overline{\text{Int }\gamma}$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = \begin{cases} f(z_0) & \text{pro } z_0 \in \text{Int } \gamma \\ 0 & \text{pro } z_0 \in \text{Ext } \gamma \end{cases}$$

G jednoduše souvislá oblast, f holomorfní v G, $[\gamma] \subset G$ cesta, $z_0 \in G - [\gamma]$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, \mathrm{d}z = f(z_0) \cdot \text{ind}_\gamma z_0$$

γ kladně orientovaná Jordanova cesta, f holomorfní v Int γ, spojitá a konečná na uzávěru, $z_0 \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$

$$\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z = f^{(n)}(z_0)$$

Laurentova řada

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, \mathrm{d}z, \text{ kde } \gamma(t) = z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

Izolované singularity

Bod $z_0 \in \mathbb{C}$ fce f se nazývá **izolovaná singularita**, jestliže f není holomorfní v z_0, ale je holomorfní v $P(z_0, R)$
Izolovaná singularita z_0 se nazývá **odstranitelná**, jestliže koeficienty hlavní části rozvoje Laurentovy řady = 0.
Izolovaná singularita z_0 se nazývá **pólem řádu k**, $k \in \mathbb{N}$, je-li $a_{-k} \neq 0, a_{-n} = 0\, \forall n > k$
Izolovaná singularita z_0 se nazývá **podstatná**, jestliže $a_{-n} \neq 0$ pro ∞-mnoho $n \in \mathbb{N}$

z_0 je odstranitelná singularita $\Leftrightarrow \exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \Leftrightarrow f$ ohraničená v $P(z_0, \rho) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow f$ lze dodefinovat, aby byla v z_0 holomorfní

z_0 pól řádu m funkce $f \Leftrightarrow \exists g$ holomorfní v z_0, $g(z_0) \neq 0$ a v okolí z_0 platí $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$
z_0 pól rádu m funkce $f \Leftrightarrow z_0$ je m-násobný kořen funkce $\frac{1}{f(z)}$

Teorie reziduí

f funkce, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ její Laurinův rozvoj. Reziduem funkce f v bodě z_0 rozumíme koeficient $a_{-1} = \mathrm{res}_{z_0} f$
f funkce, $\sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ její Laurinův rozvoj. Reziduem funkce f v bodě ∞ rozumíme číslo $-a_1 = \mathrm{res}_\infty f$

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z, \text{ kde } \gamma = z_0 + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi], 0 < \rho < R$$

$$\mathrm{res}_{z_0} f = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z, \text{ kde } \gamma = \rho e^{it}, \qquad t \in [0, 2\pi], \frac{1}{R} < \rho < \infty$$

$z_0 \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}$, z_0 pól řádu m funkce f

$$\mathrm{res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]^{(m-1)}$$

$m \in \mathbb{N}, \infty$ pól řádu m funkce f

$$\mathrm{res}_\infty f = \frac{1}{(m+1)!} \lim_{z \to \infty} \left[z^m f\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{(m+1)}$$

γ kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$, f holomorfní v Int $\gamma - \{z_1, \dots, z_m\}$
a konečná a spojitá na $\overline{\text{Int}\,\gamma} - \{z_1, \dots, z_m\}$ přičemž $\{z_1, \dots z_m\} \subset \text{Int}\,\gamma$.

$$\int\limits_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{m} \mathrm{res}_{z_j} f$$

- $$\sqrt{a+ib} = A + iB$$
  $$A = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$
  $$B = \pm\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$
  $$\operatorname{sgn}\ (A \cdot B) = \operatorname{sgn}\ (b)$$
- $$\sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \cos \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$
  $$\sum_{k=1}^{n} \cos kx = \frac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \cos \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}$$
  $$\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin \frac{n+1}{2}x \cdot \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$