Poznámka: Nechť $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ je Laurentovým rozvojem funkce f v mezikruží $P(z_0, r, R)$,

kde $0 \le r < R \le \infty$. Pak $|a_n| \le \rho^{-n} \max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$ pro libovolné $n \in \mathbb{Z}$ a $\rho \in (r, R)$

tzv. Cauchyova nerovnost pro koeficinety Laurentova rozvoje funkce f.

Důkaz: $|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z \right| \le \frac{1}{2\pi} L(\gamma) \frac{\max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|}{\rho^{n+1}} = \rho^{-n} \max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$

Izolované singularity

V tomto odstavci budeme uvažovat funkce $f : D \subseteq \widetilde{\mathbb{C}} \to \widetilde{\mathbb{C}}$

Snadno se ověří, že funkce $f(z)$ je spojitá v bodě $\infty \Leftrightarrow$ funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$ je spojitá v bodě 0.

Def: Řekneme, že funkce $f(z)$ je **holomorvní v bodě ∞**, jestliže funkce $f\left(\frac{1}{z}\right)$ je holomorní v bodě 0.

Řekneme, že funkce $f(z)$ je **holomorfní na množině** M $\subseteq \widetilde{\mathbb{C}}$, jestliže existuje otevřená množina $G \supseteq M$ taková, že $f(z)$ je holomorfní v každém bodě množiny G.

Poznámka: Holomorfnost v bodě ∞ nevyžaduje existenci derivace v ∞.

Zaveďme ještě pojem Laurentovy řady se středem $z_0 = \infty$.

Je-li funkce $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ holomorfní v $P(0, r, R)$, lze ji zde rozvinout do Laurentovy řady $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z)^n$.

Její regulární část je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ a hlavní část je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^{-n}$.

Je přirozené Laurentovou řadou se středem $z_0 = \infty$ rozumět řadu $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}$ budeme ji však zapisovat jako $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_{-n} z^n$. Její regulární část je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^{-n}$ a její hlavní část je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$.

Poznámka: Laurentova řadou se středem v bodě ∞ se tedy tvarem neliší od Laurentovy řady se středem v bodě 0.

Rozdíl je pouze v označení regulární a hlavní části. Odtud plyne, že výsledky odvozené pro Laurentovy řady platí i v případě $z_0 = \infty$.

Pro $0 < R \le \infty$ položme $P(z_0, R) = \begin{cases} P(z_0, 0, R) & \text{pro } z_0 \in \mathbb{C} \\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{R}\} & \text{pro } z_0 = \infty \end{cases}$ prstencové okolí bodu z_0.

$$K(\infty, R) = \{z \in \widetilde{\mathbb{C}} \mid |z| > \tfrac{1}{R}\}$$

Def: Bod $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ se nazývá **izolovaná singularita** funkce f, jestliže funkce f není holomorfní v bodě z_0 avšak je holomorfní v jistém prstencovém okolí P(z_0, R) bodu z_0.

Je-li z_0 izolovaná singularita funkce f, lze f v P(z_0, R) rozvinout do Laurentovy řady $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

Izolovanou singularitu z_0 funkce f nazveme **odstranitelnou singularitou**, jestliže všechny koeficienty hlavní části Laurentova rozvoje jsou rovny 0.

Izolovanou singularitou z_0 funkce f nazveme **pólem řádu k**, $k \in \mathbb{N}$, jestliže $a_{-k} \neq 0$ a $a_{-n} = 0$ pro $n > k$. V případě $k = 1$ hovoříme o **jednoduchém pólu**.

Izolovanou singularitu z_0 funkce f nazveme **podstatnou singularitou**, jestliže $a_{-n} \neq 0$ pro ∞ mnoho indexů $n \in \mathbb{N}$.

Věta: Nechť $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$ je izolovaná singularita funcke f. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

1. z_0 je odstranitelná singularita funkce f
2. funkce f lze v bodě z_0 definovat tak, že f je v bodě z_0 holomorfní
3. existuje vlastní limita $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$
4. funkce f je v jistém prstencovém okolí P(z_0, ρ) ohraničená

Důkaz:
$1 \Rightarrow 2$: $f(z) = \sum\limits_{z=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ v $P(z_0, R)$. Definujeme-li $f(z_0) = a_0$, platí:
$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ v $K(z_0, R) \Rightarrow f$ je holomorfní v $K(z_0, R)$.
$2 \Rightarrow 3$ zřejmé
$3 \Rightarrow 4$ zřejmé
$4 \Rightarrow 1$ Nechť $m > 0$ je konstanta taková, že $|f(z)| \leq m$ v $P(z_0, \rho)$. BÚNO $0 < \rho < R$.
Pak $|a_n| \leq \rho^{-n} \max\limits_{|z-z_0|=\rho} |f(z)| \leq \rho^{-n} m \overset{\rho \to 0^+}{\longrightarrow} 0$ pro $n \in -\mathbb{N}$.

Důsledek 1: Buď f holomorfní v $P(z_0, R)$. Má-li f v bodě z_0 odstranitelnou singularitu, položíme $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ je f holomorfní v $K(z_0, R)$.
Důsledek 2: Nechť f je spojitá a konečná v bodě $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Jestliže existuje prstencové okolí $P(z_0, R)$ taková, že f je holomorfní v $P(z_0, R)$, je f holomorfní v bodě z_0.

Příklad:
$f(t) = t, \quad g(t) = te^{\frac{i}{t}}$
$\lim\limits_{t \to 0} f(t) = 0 \quad \lim\limits_{t \to 0} g(t) = 0$
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f'(t)}{g'(t)} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{1}{e^{\frac{i}{t}} + i \frac{e^{\frac{i}{t}}}{t}} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{(t-i) e^{\frac{i}{t}}} = 0$
$\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim\limits_{t \to 0} e^{-\frac{i}{t}} = \lim\limits_{t \to 0} \left(\cos \frac{1}{t} - i \sin \left(\frac{1}{t}\right)\right) \ldots$ neexistuje

Věta: *L'Hospitalovo pravidlo*
Nechť $f(z)$ a $g(z)$ jsou holomorfní v $P(z_0, R)$, kde $z_0 \in \widetilde{\mathbb{C}}$, $0 < R \leq \infty$.
Nechť $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$ přičemž g není identicky nulová.
Pak existuje $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$ a platí: $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim\limits_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}$