Cauchyho vzorec

Nechť γ je kladně orientovaná Jordanova cesta v $\mathbb{C}$. Nechť f je holomorfní funkce v $Int\,\gamma$ a je spojitá a konečná na $\overline{Int\,\gamma}$. Pak platí:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{pro } z \in Int\,\gamma \\ 0 & \text{pro } z \in Ext\,\gamma \end{cases}$$

Tedy:

$$\int\limits_{\gamma}\frac{f(z)}{z - z_0}\mathrm{d}z = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & z_0 \in Int\,\gamma \\ 0 & z_0 \in Ext\,\gamma \end{cases}$$

Příklad

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$$

Budeme řešit křivkový integrál: $\int\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z$

$\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$
$\gamma_1 : z = t, \quad$ pro $t \in [-R, R]$
$\gamma_2 : z = Re^{it}$, pro $t \in [0, \pi]$

S využitím Cauchyho vzorce:

$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma}\frac{\frac{e^{iz}}{z+ia}}{z-ia}\mathrm{d}z = 2i\pi f(ia)$, kde $f(z) = \frac{e^{iz}}{z+ia}$

$\int\limits_{\gamma}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma}\frac{\frac{e^{iz}}{z+ia}}{z-ia}\mathrm{d}z = 2i\pi\frac{e^{-a}}{ia+ia} = \frac{\pi}{a}e^{-a}$

Nyní stejný integrál spočteme jako součet dvou integrálů:

$\int\limits_{\gamma_1}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R}\frac{e^{it}}{t^2+a^2}dt = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\cos t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t + i\int\limits_{-R}^{R}\frac{\sin t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t = 2\int\limits_{0}^{R}\frac{\cos t}{t^2+a^2}\mathrm{d}t$

Druhý integrál budeme chtít pro $R \to \infty$ odhadnout shora jako nulu:

$\left|\int\limits_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_{0}^{\pi}\frac{e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+a^2}Rie^{it}\ \mathrm{d}t\right| = \left|i\int\limits_{0}^{\pi}\frac{Re^{iR(\cos t + i\sin t)}}{R^2e^{2it}+a^2}e^{it}\ \mathrm{d}t\right| \le \int\limits_{0}^{\pi}\left|\frac{Re^{iR\cos t}e^{-R\sin t}}{R^2e^{2it}+a^2}e^{it}\right|\mathrm{d}t =$
$= \int\limits_{0}^{\pi}\frac{R\left|e^{iR\cos t}\right|e^{-R\sin t}}{\left|R^2e^{2it}+a^2\right|}\left|e^{it}\right|\ \mathrm{d}t = \int\limits_{0}^{\pi}\frac{1}{e^{R\sin t}\left|Re^{2it}+\frac{a^2}{R}\right|}\ \mathrm{d}t \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{0}^{\pi}0\ \mathrm{d}t = 0$

Celkem tedy:

$\frac{\pi}{a}e^{-a} = 2\int\limits_{0}^{R}\frac{\cos t}{t^2+a^2}\ \mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z$

$\overset{R\to\infty}{\Longrightarrow}$

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-a}}{2a}$$

Příklad

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\ \mathrm{d}x$$

Budeme řešit křivkový integrál: $\int\limits_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_1} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z + \int\limits_{\gamma_2} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z$

$\gamma = \gamma_1 \dot{+} \gamma_2$

$\gamma_1 : z = t,\quad$ pro $t \in [-R, R]$

$\gamma_2 : z = Re^{it}$, pro $t \in [0, \pi]$

S využitím Cauchyho vzorce:

$\int\limits_\gamma \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_\gamma \frac{\frac{ze^{iz}}{z-ia}}{z+ia} = 2i\pi\frac{iae^{-a}}{2ia} = i\pi e^{-a}$

Pomocí součtu příslušných dvou křivkových integrálů:

$\int\limits_{\gamma_1} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z = \int\limits_{-R}^{R} \frac{te^{it}}{t^2+a^2}\ \mathrm{d}t = \int\limits_{-R}^{R} \frac{t\cos t}{t^2+a^2}\ \mathrm{d}t + i\int\limits_{-R}^{R} \frac{t\sin t}{t^2+a^2}\ \mathrm{d}t = 2i\int\limits_0^R \frac{t\sin t}{t^2+a^2}$

Druhý integrál budeme chtít pro $R \to \infty$ odhadnout jako 0:

$\left|\int\limits_{\gamma_2} \frac{ze^{iz}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}z\right| = \left|\int\limits_0^\pi \frac{Re^{it}e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+a^2} Rie^{it}\ \mathrm{d}t\right| = \left|i\int\limits_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{R^2e^{2it}+a^2}\right|\ \mathrm{d}t \leq \int\limits_0^\pi \frac{\left|e^{iR\cos t}\right|e^{-R\sin t}}{|R^2e^{2it}+a^2|}\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^\pi \frac{e^{-R\sin t}}{|R^2e^{2it}+a^2|}\ \mathrm{d}t$

$\overset{R\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^\pi 0\ \mathrm{d}z = 0$

Celkem tedy:

$i\pi e^{-a} = 2i\int\limits_0^R \frac{t\sin t}{t^2+a^2}\ \mathrm{d}t + \int\limits_{\gamma_2} \frac{ze^{it}}{z^2+a^2}\ \mathrm{d}t$

$\overset{R\to\infty}{\Longrightarrow}$

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\pi e^{-a}}{2}$$