

Odvození některých vzorců

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \sin y \cos x \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) &= 2 \sin x \cos y \\ \sin(x+y) - \sin(x-y) &= 2 \sin y \cos x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ \cos(x+y) + \cos(x-y) &= 2 \cos x \cos y \\ \cos(x+y) - \cos(x-y) &= -2 \sin x \sin y\end{aligned}$$

Nyní využijeme odvozených vzorců pro odvození derivací přímo z definice:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Využijeme předchozích vzorců, přičemž je třeba dosadit za x a y (níže značeno jako a a b)

$$\begin{aligned}x &= a + b \\ x_0 &= a - b\end{aligned}$$

Když soustavu vyřešíme (rovnice sečteme a odečteme od sebe), dostaneme:

$$\begin{aligned}a &= \frac{x + x_0}{2} \\ b &= \frac{x - x_0}{2}\end{aligned}$$

Celkem tedy $\forall x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x) - \sin(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \sin \frac{x-x_0}{2} \cos \frac{x+x_0}{2}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \cos \frac{x+x_0}{2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \cos \frac{x+x_0}{2} = \cos x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x) - \cos(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \frac{x-x_0}{2}}{\frac{x-x_0}{2}} \sin \frac{x+x_0}{2} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \sin \frac{x+x_0}{2} = -\sin x_0\end{aligned}$$

Nyní odvodíme derivaci x^n .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1})}{x - x_0} = nx_0^{n-1}$$

Jednou vlastností funkce e^x je, že směrnice tečny v každém bodě je rovna funkční hodnotě. Tedy $(e^x)' = e^x$.

Pro derivace dále platí následující vzorce:

Derivace součtu:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Derivace součinu:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Derivace složené funkce:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$

Derivace podílu:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Násobení konstantou:

$$(cf(x))' = c(f(x))'$$

Nyní pomocí exponenciální funkce odvodíme derivaci přirozeného logaritmu (touto metodou lze obecně odvodit derivaci libovolné inverzní funkce):

$$\begin{aligned}e^{\ln(x)} &= x \\(e^{\ln(x)})' &= x' \\e^{\ln(x)}(\ln x)' &= 1 \\x(\ln x)' &= 1 \\(\ln x)' &= \frac{1}{x}\end{aligned}$$

Dále můžeme odvodit například $(a^x)'$:

$$\begin{aligned}a^x &= e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \\(a^x)' &= (e^{x \ln a})' \\(a^x)' &= e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a\end{aligned}$$

Dále můžeme odvodit například $(\log_a x)'$

$$\begin{aligned}\log_a x &= \frac{\ln x}{\ln a} \\(\log_a x)' &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}$$

Vzorke pro derivování:

1. $(c)' = 0$

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$

3. $(a^x)' = a^x \ln a$

4. $(e^x)' = e^x$

5. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

6. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

9. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

10. $(\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

11. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

12. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

13. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

14. $(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

L'Hospitalovo pravidlo

Necht' je dána limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ tvaru $\frac{0}{0}$ nebo $\frac{\infty}{\infty}$, kde $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Existuje-li limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, pak existuje i limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ a jsou si rovny.

Normála a tečna funkce v daném bodě

Nyní odvodíme vzorce pro tečnu a normálu funkce $f(x)$ v bodě x_0 .

Předpokládejme, že funkce má v bodě x_0 vlastní derivaci (v opačném případě by u spojitě funkce byla tečnou svislá přímka, která by měla rovnici $x = x_0$).

Víme, že derivace udává směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě:

$$\begin{aligned}y &= kx + q \\y &= f'(x_0)x + q\end{aligned}$$

Víme, že v bod dotyku $[x_0, y_0] = [x_0, f(x_0)]$ určitě leží na tečně. Díky tomu vypočteme q .

$$\begin{aligned}y &= f'(x_0)x + q \\f(x_0) &= f'(x_0)x_0 + q \\q &= f(x_0) - f'(x_0)x_0\end{aligned}$$

Po dosazení do rovnice tečny dostáváme:

$$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

Což lze upravit na:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Nebo:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Nyní odvodíme rovnici normály (normála je přímka, která je kolmá na graf funkce v daném bodě - tedy i na tečnu).

Směrový vektor tečny byl $(f'(x_0), 1)$, proto směrovým vektorem normály je $(1, -f'(x_0))$ nebo také $(-\frac{1}{f'(x_0)}, 1)$

Odtud dostáváme vyjádření rovnice normály: $y = -\frac{1}{f'(x_0)}x + q$

Opět počítáme q s využitím toho, že bod $[x_0, f(x_0)]$ leží na normále.

$$\begin{aligned}y &= -\frac{1}{f'(x_0)}x + q \\f(x_0) &= -\frac{1}{f'(x_0)}x_0 + q \\q &= f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}x_0 \\y &= -\frac{1}{f'(x_0)}x + f(x_0) + \frac{1}{f'(x_0)}x_0\end{aligned}$$

Což lze opět upravit na:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Nebo:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

Extrémy funkce a další užití derivací

Necht' $f'(x_0) > 0$, pak existuje okolí bodu x_0 , kde je funkce f rostoucí.

Necht' $f'(x_0) < 0$, pak existuje okolí bodu x_0 , kde je funkce f klesající.

Pokud má funkce v bodě x_0 extrém a funkce má v tomto bodě vlastní derivaci, pak $f'(x_0) = 0$

Pokud $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Pokud $f'(x_0) = 0$ a $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Funkce je konvexní v bodě x_0 jestliže její graf leží nad tečnou (či na ní), konkávní, jestliže její graf leží pod tečnou (či na ní) pro nějaké okolí bodu x_0 .

Konkávní funkce se "otevívá" směrem nahoru, konvexní směrem dolů. Například funkce $y = x^2$ je konvexní v celém svém definičním oboru.

Funkce $\sin x$ a $\cos x$ jsou konvexní tam, kde jsou nekladné a konkávní tam, kde jsou nezáporné.

Pokud $f''(x_0) > 0$, je funkce v bodě x_0 konvexní.

Pokud $f''(x_0) < 0$, je funkce v bodě x_0 konkávní.

Asymptotou bez směrnice grafu funkce f nazveme přímku $x = x_0$, pokud $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \infty$

Asymptotou se směrnicí pro $x \rightarrow \infty$ je pak přímka $y = ax + b$, kde

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$$

Asymptotou se směrnicí pro $x \rightarrow -\infty$ je pak přímka $y = ax + b$, kde

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$